Układy dynamiczne i Teoria Ergodyczna
(Kurs dla doktorantów)
Kolokwium zaliczeniowe
28.01.2020

1. (a) Podaj definicję punktu generycznego w układzie topologicznym (X, T) dla miary niezmienniczej μ.

   (b) Udowodnij, że jeśli układ topologiczny (Y, S) jest faktorem topologicznym układu topologicznego (X, T) poprzez (oczywiście ciągłe) odwzorowanie $\pi : X \to Y$ oraz $x \in X$ jest punktem generycznym dla pewnej miary niezmienniczej μ na X, to $y = \pi(x)$ jest punktem generycznym dla miary $\nu = \pi(\mu)$ na Y zdefiniowanej wzorem $\nu(A) = \mu(\pi^{-1}(A))$ (gdzie A oznacza zbiór borelowski w Y).

   Rozwiązania:

   (a) Punkt x jest generyczny dla miary μ, jeśli miary atomowe

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^i x}$$

   zbiegają $*$-słabo do μ. Inaczej mówiąc, jeśli dla każdej funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{R}$ zachodzi zbieżność

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \to \int f\, d\mu.$$

   (b) Niech $f : Y \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Wtedy $g : X \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $g(x) = f(\pi(x))$ (czyli $g = f \circ \pi$) jest ciągła na X, zatem, skoro x jest generyczny dla μ, to zachodzi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) \to \int g\, d\mu.$$

   Ale lewa strona się równa

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\pi(T^i x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(\pi x)),\ \text{bo } \pi\circ T = S\circ\pi \text{ i to samo zachodzi dla } T^i.$$

   Teraz podstawiamy $\pi x = y$ i dostajemy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(y)) \to \int g\, d\mu.$$

   Pozostaje zauważyć, że $\int g\, d\mu = \int f\, d\nu$, bo g jest „podniesieniem" funkcji f, a ν jest „projekcją" miary μ. Formalnie taką równość sprawadza się najpierw dla funkcji charakterystycznych zbiorów mierzalnych, potem dla funkcji prostych, wreszcie dla funkcji ograniczonych mierzalnych (w tym ciągłych). Jest to metoda znana potocznie jako „metoda komplikacji funkcji". Tego dowodu nie trzeba przytaczać w rozwiązaniu.

   Ostatecznie $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(S^i(y)) \to \int f\, d\nu$ (dla dowolnej f ciągłej na Y) co oznacza, że y jest generyczny dla μ.

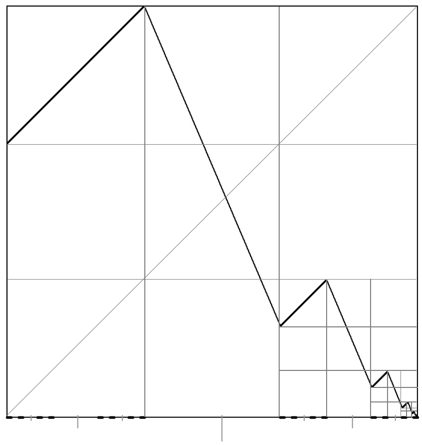
2. (a) Podaj przykład przekształcenia, które ma punkty okresowe o wszystkich możliwych okresach.

   (b) (*na kreatywność*) Podaj przykład (można narysować wykres) ciągłego przekształcenia odcinka w siebie, które ma punkty okresowe o okresach postaci 2^n dla wszystkich $n \geqslant 0$, i żadnych innych. Przynajmniej napisz jakiś łatwo sprawdzalny warunek, jaki musi spełniać przekształcenie, aby nie miało ono punktów okresowych o okresach innych niż potęgi 2.

Rozwiązania:

(a) Wystarczy aby istniał punkt o okresie 3 (działa Tw. Szarkowskiego). Teraz można szaleć. Np. chcemy, żeby $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = 0$. To nam daje trzy punkty na wykresie. Wysrarczy je połączyć (jakkolwiek linią ciągłą) i przykład gotowy.

(b) Istnieje wiele możliwości. Jedną z nich przedstawia rysunek.



Rysunek 1: Czarne odcineczki na osi Ox tworzą klasyczny (trójpodzielny) zbiór Cantora. Dla każdego $n \geqslant 0$ jest jedna orbita o okresie 2^n. Orbity te są zaznaczone pionowymi kreseczkami na osi Ox (najdłuższa w środku to punkt stały, dwie krótsze to orbita o okresie 2, jeszcze zaznaczyłem orbitę długości 4). Zbiór Cantora jest niezmienniczy i na nim mamy układ minimalny (odometr dwójkowy). Wszystkie pozostałe punkty (czyli nie te o okresach 2^n i nie te z odometru) są przyciągane do odometru, a więc nie ma innych punktów okresowych.

To nie było do wymyślenia w pół godziny. Albo ktoś to znał, albo wymyślił intuicyjnie, ale raczej nie miał szans na wyprowadzenie dowodu żądanych własności. Będę pozytywnie oceniać rozwiązania podane bez dowodu.

3. Udowodnij, że układ generowany przez ciąg Thue–Morse'a (jako jego orbita domknięta pod działaniem shiftu) ma entropię topologiczną zero.

Rozwiązanie: Wiadomo, że dla każdego n, kolejne bloki w ciągu Morse'a długości 2^n są tylko dwóch rodzajów, powiedzmy A i B. (Jeśli je oznaczymy symbolami 0 i 1, to te symbole utworzą znowu ciąg Morse'a). W każdym razie możemy teraz łatwo oszacować liczbę bloków długości 2^n. Otóż jest ich nie więcej niż $4 \cdot 2^n$. Czwórka bierze się stąd, że blok ten może leżeć na styku dwóch bloków AA, AB, BA lub BB. Natomiast liczba 2^n mówi, na ile możliwości nasz blok może być przesunięty względem np. środka tego połączenia – takich położeń jest dokładnie tyle co długość bloków A (lub B), czyli 2^n. Wzór na entropię topologiczną układu (X, σ) generowanego przez ciąg Morse'a, to

$$h_{top}(X) = \lim_k \frac{1}{k} \log |\mathcal{B}^k(X)|.$$

Można zamiast tego wziąć granicę podciągu po potęgach dwójki, czyli po $k = 2^n$. Bloków takiej długości k występujących całym układzie jest tyle samo co bloków występujących w ciągu Morse'a, czyli nie więcej niż $4 \cdot 2^n$. Zatem wstawiamy do wzoru:

$$h_{top}(X) = \lim_n \frac{1}{2^n} \log |4 \cdot 2^n| = \lim_n \frac{(n+2)\log 2}{2^n} = 0.$$

4. (Wymiennie za zadanie 2. (a) dla osób mniej kreatywnych) Podaj definicję miary Mirskiego i napisz co wiesz o jej własnościach dynamicznych.

   Rozwiązanie: Miara Mirskiego jest to miara na $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, niezmiennicza na shift, której punktem generycznym jest funkcja charakterystyczna zbioru liczb bezkwadratowych.

   Własności: Jest to miara ergodyczna, o widmie dyskretnym wymiernym, zatem też o entropii miarowej zero (tego ostatniego macie prawo nie wiedzieć). Inaczej, układ symboliczny z tą miarą jest miarowo izomorficzny z pewnym odometrem (a konkretnie, bazą tego odometru są iloczyny kwadratów kolejnych liczb pierwszych: 4, $4{\cdot}9$, $4{\cdot}9{\cdot}25$, itd).

Tomasz Downarowicz